Решения заданий отборочного этапа
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2024-25 г.г.

10 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

10.1. Расставить в каждой клетке таблицы 3 на 3 по одному натуральному числу от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел в любой паре соседних по стороне клеток была составным числом. Все девять чисел должны быть использованы.

Ответ. Слева направо - первая строка: 1,9,5, вторая строка: 3,6,4, третья строка: 7,2,8. Нумерация строк снизу вверх.

Решение. Заметим, что сумма двух различных натуральных чисел одной чётности является чётным числом, большим двух, следовательно – составным числом. Поэтому, если разместить нечётные числа в первом столбце и первой строке, а чётные – в остальных 4 клетках, образующих квадрат 2 на 2 в правом верхнем углу таблицы, то нужно следить только за 4 суммами в парах соседних клеток, содержащих чётное и нечётное числа. Одним из вариантов является расстановка в таких парах чисел 7+2, 3+6, 9+6 и 5+4.
Возможно много вариантов расстановок, удовлетворяющих условию.

Критерии проверки. (●) Любой правильный пример расстановки: 7 баллов.

10.2. Во вписанном в окружность пятиугольнике ABCDE величины углов ABE, BEC и ECD равны 40, 50 и 50 градусов соответственно, а длины стороны AB и диагонали CE равны 5 и 7 см соответственно. Найти длину диаметра окружности.

Ответ. $\sqrt{74}$ см.

Решение. Равенство накрест лежащих углов BEC и ECD влечёт параллельность хорд BE и CD, откуда следует равенство дуг и хорд BC и ED. Кроме того, в равнобедренной трапеции BCDE равны диагонали CE и BD.

Вписанные углы ECD и EBD, опирающиеся на общую дугу DE равны, поэтому величина угла EBD равна 50 градусов, а угла ABD – равна сумме ABE и EBD, то есть 90 градусов, в частности, он опирается на диаметр окружности. Следовательно, сумма квадратов AB и CE равна сумма квадратов AB и BD катетов прямоугольного треугольника ABD, равна квадрату его гипотенузы AD, то есть квадрату длины диаметра окружности. Значит, диаметр окружности равен $\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{AB^2+CE^2}=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}$.

Критерии проверки. (●) Замечено равенство хорд CE и BD: 2 балла. (●) Замечено равенство углов ECD и EBD: 2 балла. (●) Замечено, что угол ABD прямой: 2 балла.

10.3. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a, b выполняется неравенство:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\le a+b.$$

Доказательство 1. Сделаем замену $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, y=\sqrt{ab}$, тогда $a+b=\sqrt{2(x^2+y^2)}$. Исходное неравенство эквивалентно такому: $x+y\le\sqrt{2(x^2+y^2)}$, обе его стороны положительны, можно возвести в квадрат, после чего получим $0\le(x-y)^2$ – очевидно верное неравенство.

Доказательство 2. Если не умничать, то начинаем последовательные возведения в квадрат, избавляясь от радикалов. После первого возведения получаем: a^2+b^2+2ab+ $+2\sqrt{2ab(a^2+b^2)}\le 2(a+b)^2$, после приведения подобных имеем: $2\sqrt{2ab(a^2+b^2)}\le$ $(a+b)^2$, то есть $8ab(a^2+b^2)\le(a+b)^4$. Выполнив возведение в четвёртую степень в правой части, и приведя подобные, получим: $a^4-4a^3b+6a^2b^2-6ab^3+b^4=(a-b)^4\ge$ 0, что, естественно, верно.

Критерии проверки. (●) За возведение неравенств в квадрат без упоминания о не отрицательности его сторон, особенно если это не очевидно: снимаем 1 балл.

10.4. Найти все натуральные числа n, для которых число $n \cdot 2^{n-1} + 1$ является квадратом натурального числа.

Ответ. $n = 5$.

Решение. Пусть $n \cdot 2^{n-1} + 1 = x^2$ для некоторого натурального x, тогда $n \cdot 2^{n-1} = (x-1)(x+1)$. Легко убедиться, что при $n \leq 4$ равенство не выполняется, поэтому $n \geq 5$ и левая часть последнего равенства чётна. В таком случае x нечётно и обе скобки в правой части чётны, преобразуем его в равенство $n \cdot 2^{n-3} = \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x+1}{2}$. Дроби в правой части являются последовательными натуральными числами, поэтому одно из них чётное, а другое – нечётное, следовательно, одно из них делится на всю степень двойки 2^{n-3}. То есть, одно из них не меньше 2^{n-3}, а другое – не больше n, при этом оба различаются всего на 1. Отсюда следует, что $n \geq 2^{n-3} - 1$. Последнее неравенство, очевидно, не выполнено при $n \geq 6$, доказательство этого от участников мы требовать не будем. Единственным кандидатом в решения является $n = 5$, что и будет ответом: $5 \cdot 2^4 + 1 = 9^2$.

Критерии проверки. (●) За отсутствие доказательства невыполнимости неравенства $n \geq 2^{n-3} - 1$ при $n \geq 6$: **баллы не снимаем** (●) Только угадан ответ $n = 5$: 1 балл. (●) Присутствует разложение $n \cdot 2^{n-3} = \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x+1}{2}$: 1 балл. (●) Понято, что сомножителями в правой части равенства являются два последовательных числа, одно из которых чётно, а другое – нечётно: 1 балл. (●) Понято, что чётный сомножитель делится на всю степень 2^{n-3} : 1 балл. (●) Отсюда сделан вывод, что $n \geq 2^{n-3} - 1$: 2 балла. (●) Из последнего неравенства делается вывод, что $n \leq 5$: 1 балл. (●) Отсюда находится единственный ответ $n = 5$: 1 балл.

10.5. Пусть k – произвольное натуральное число из интервала от 1 до 20 включительно. Два игрока, Вася и Петя играют на доске размера 20 на 20 в игру, выполняя по очереди следующие ходы. Сначала все клетки доски белые. Первым ходит Вася. За один свой ход Вася либо красит любую белую клетку в красный цвет, либо передаёт ход Пете. За один свой ход Петя либо красит в синий цвет любой квадрат доски размера k на k, состоящий целиком из белых клеток, либо передаёт ход Васе. Игра заканчивается, когда каждый из игроков одновременно отказывается от своего хода, в том числе, из-за невозможности его сделать. Если в итоге на доске окажется больше красных клеток, победит Вася, если больше синих – Петя, если поровну – ничья. Определите исход игры при каждом $k = 1,2,\ldots,20$.

Ответ. При k=1,2,5,10 игра оканчивается вничью, при всех остальных значениях k выигрывает Вася.

Решение. Для произвольного $\boldsymbol{k}$ разделим 20 на $\boldsymbol{k}$ с остатком: $20 = k \cdot m + r, r < k$. Разделим доску на m^2 квадратов размера $\boldsymbol{k}$ на $\boldsymbol{k}$ клеток, m прямоугольников размера размера $\boldsymbol{r}$ на $\boldsymbol{k}$ клеток, m прямоугольников размера $\boldsymbol{k}$ на $\boldsymbol{r}$ клеток, один квадрат размера $\boldsymbol{r}$ на $\boldsymbol{r}$ клеток и поставим в каждом из квадратов размера $\boldsymbol{k}$ на $\boldsymbol{k}$ точку в клетке со внутренними координатами $(r+1, r+1)$. Прямоугольники и квадрат размера $\boldsymbol{r}$ на $\boldsymbol{r}$ при этом считаются расположенными вдоль верхней и правой сторон доски. Заметим, что на доске любой квадрат размера $\boldsymbol{k}$ на $\boldsymbol{k}$ клеток накрывает ровно одну клетку с точкой, поэтому своим ходом Петя всегда красит ровно одну клетку с точкой. Если их не остаётся, он не может сделать ход. Действительно, рассмотрим номера горизонталей и вертикалей, на пересечении которых находится произвольный квадрат размера $\boldsymbol{k}$ на $\boldsymbol{k}$. В обоих случаях это будут $\boldsymbol{k}$ последовательных натуральных чисел, ровно одно из которых даёт остаток $r+1$, при делении на $\boldsymbol{k}$. Возьмём клетку, стоящую в соответствующих горизонтали и вертикали, она и будет иметь внутренние координаты $(r+1, r+1)$ в соответствующем квадрате разбиения. При этом внутренним координатам (k, k) соответствует остаток 0.

Замечание. При другом выборе внутренних координат клетки с точкой, например $(x, y), x \leq r, y \leq r.$ у нас может получиться $(m+1)^2$ таких клеток и рассуждения, приведённые дальше, уже не пройдут. Хотя утверждение о том, что на доске любой квадрат размера $\boldsymbol{k}$ на $\boldsymbol{k}$ клеток накрывает ровно одну клетку с точкой останется верным, часть из них Пете накрыть уже не удастся, и пропадёт точная оценка максимума числа ходов, которое могут сделать игроки. Тогда нельзя будет построить стратегию для Васи.

Стратегия Васи: он красит последовательно все ещё не окрашенные к моменту его очередного хода клетки с точками. Тогда каждый из них своим ходом красит ровно по одной клетке с точкой, и, когда обоими игроками в сумме будут сделаны m^2 ходов, все клетки с точками будут окрашены, причём не меньше половины из них будут окрашены Васей, а Петя больше не сможет сделать ни одного хода.

После остановки Пети оставшиеся клетки окрасит Вася. Следовательно, при чётном m Петя в любом случае сможет окрасить не больше $\frac{m^2}{2} \cdot k^2$ клеток, что составляет ровно половину от всех $(k \cdot m + r)^2$ клеток доски только при $r = 0$ и чётном m, и меньше половины при $r > 0$. Следовательно, если 20 делится нацело на $\boldsymbol{k}$ и $20 = k \cdot m$, где m – чётно, то Петя может сделать максимум ничью. Такими $\boldsymbol{k}$ будут 1,2,5 и 10.

Стратегия Пети для достижения ничьи: Петя должен красить в точности только те «отмеченные» квадраты размера $\boldsymbol{k}$ на $\boldsymbol{k}$ клеток, на которые доска была разделена с самого начала, и не пропускать свой ход. Тогда он и Вася своими ходами исключают из дальнейшего использования Петей ровно по одному (а не больше) отмеченному квадрату $\boldsymbol{k}$ на $\boldsymbol{k}$ и Петя сможет сделать ровно $\frac{m^2}{2}$ результативных ходов и окрасить в синий цвет половину всех клеток доски. При проверке нужно особенно внимательно следить за изложением стратегии Пети по достижению ничьей.

При нечётном m Петя в любом случае сможет окрасить не больше $\frac{m^2-1}{2} \cdot k^2$ клеток, что составляет меньше половины от всех $(k \cdot m + r)^2$ клеток доски. Поэтому для нечётного m Петя в любом случае проиграет.

Критерии проверки. (●) Указана идея разрезания доски на квадраты $\boldsymbol{k}$ на $\boldsymbol{k}$ клеток и прямоугольники: 1 балл. (●) Расставлены точки в соответствующие клетки так, что своим ходом Петя всегда красит ровно одну клетку с точкой и клеток с точками всего m^2: 2 балла. (●) Явно и точно сформулированы оптимальные стратегии Васи и Пети: по 1 баллу за каждую. (●) Подсчётами доказана верность этих стратегий: 2 балла.

Замечание. Все описанные выше общие рассуждения в работе участников могут быть описаны на частных примерах, скажем, k=4,5,6. Если все три принципиальных момента:
1) проигрыш Пети в случае, когда k не делит 20,
2) проигрыш Пети в случае, когда k делит 20, но частное нечётно,
3) ничья в случае, когда k делит 20, но частное чётно,
показаны на примерах чётко и с явным обоснованием, можно поставить 6 баллов.
Отсутствие каждого случая – минус 2 балла.